

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: جبر ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۲

۱- کدام گروه حل پذیر می باشد.

۱. گروه ناآبلی ساده  $S_5$  .۲  
۲.  $S_5$  .۳  
۳.  $S_5 \times \mathbb{Z}_p$  .۴  
۴.  $D_n \times \mathbb{Z}_p$  .۵

۲- کدام حلقه یک میدان است.

۱.  $\frac{Q[x]}{\langle x^3 + x^2 + x + 1 \rangle}$  .۱  
۲.  $\frac{R[x]}{\langle x^2 - 1 \rangle}$  .۲  
۳.  $\frac{R[x]}{\langle x^3 - 4x^2 + x + 6 \rangle}$  .۳  
۴.  $\frac{Z[x]}{\langle x^4 - 4x^3 + 6 \rangle}$  .۴

۳- حلقه  $\frac{R[x]}{\langle x^2 + 1 \rangle}$  با کدام حلقه یکرخت می باشد.

۱. میدان اعداد گویا .۱  
۲. میدان اعداد حقیقی .۲  
۳. میدان اعداد مختلط .۳  
۴. هیچکدام .۴

۴- اگر  $f(x)$  یک چندجمله ای تحویلناپذیر درجه سه باشد آنگاه حلقه  $\frac{F[x]}{\langle f(x) \rangle}$  چند عضو دارد.

۱. ۲۷ .۱  
۲. ۱۸ .۲  
۳. ۹ .۳  
۴. ۳ .۴

۵- کدام گزینه نمی تواند میدان کسرهای حلقه  $R[i]$  باشد.

۱. میدان اعداد مختلط .۱  
۲. میدان اعداد حقیقی .۲  
۳.  $R[i]$  .۳  
۴.  $R(i)$  .۴

۶- اگر  $F = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  آنگاه  $[F : Q]$  برابر است با:

۱. ۴ .۱  
۲. ۲ .۲  
۳. ۶ .۳  
۴. ۳ .۴

۷- گروه خودریختیهای  $Q(\sqrt{2})$  با کدام گروه یکرخت است؟

۱.  $\mathbb{Z}_4$  .۱  
۲.  $\mathbb{Z}_3$  .۲  
۳.  $\mathbb{Z}_p$  .۳  
۴.  $\mathbb{Z}$  .۴

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: جبر ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۲

۸- اگر  $\alpha$  ریشه سوم اولیه واحد روی میدان اعداد گویا باشد، آنگاه:

۱. چند جمله ای مینیمال  $\alpha$  دارای دو عامل خطی در  $Q[x]$  است.

۲.  $[Q(\alpha):Q] = 2$

۳.  $[Q(\alpha):Q] = 3$

۴. چند جمله ای مینیمال  $\alpha$  از درجه سه می باشد.

۹- میدان اعداد جبری:

۱. توسیعی جبری از میدان اعداد گویا نیست.

۲. توسیعی جبری با بعد نامتناهی از میدان اعداد گویا است.

۳. توسیعی متناهی از میدان اعداد گویا است.

۴. توسیعی جبری با بعد نامتناهی از میدان اعداد گویا است.

۱۰- اگر  $F = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  آنگاه، گروه گالوای  $Gal(F/Q)$  با کدام گروه یکرخت است.

۱.  $Z_6$

۲.  $k_6$  (گروه کلاین)

۳.  $Z_2 \times Z_3$

۱۱- اگر  $F$  توسیعی متناهی از  $K$  باشد و  $G = Gal_k^F$  آنگاه کدام گزاره با بقیه متفاوت است؟

۱. حداقل یک میدان میانی از  $F$  روی  $K$  وجود دارد که بسته نیست.

۲.  $F$  توسیع نرمال  $K$  است.

۳.  $K$  در  $F$  بسته است.

۴.  $o(G) = [K:F]$

۱۲- اگر  $F$  یک توسیع متناهی از  $K$  باشد بطوریکه  $o(Gal_k^F) = [F:K]$  آنگاه:

۱.  $n = o(Gal_k^F)$  که در آن  $F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

۲.  $n \leq o(Gal_k^F)$  که در آن  $F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

۳. عضوی مانند  $\alpha \in F$  وجود دارد که  $F = K(\alpha)$

۴. اعضای مانند  $\alpha_1, \alpha_p \in F$  وجود دارد که  $F = K(\alpha_1, \alpha_p)$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: جبر ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۲

۱۳- اگر  $w = \sqrt[3]{2}$  و  $\alpha$  یک ریشه سوم اولیه واحد روی  $Q$  باشد و همچنین  $F = Q(w, \alpha)$  و  $G = Gal_Q^F$  آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱.  $F$  میدان شکافنده  $x^3 - 2$  روی  $Q$  می باشد.

۲. میدان  $Q$  در  $F$  بسته است.

۴.  $o(G) = [F : K]$

۳.  $G \cong \mathbb{Z}_6$

۱۴- اگر  $\alpha$  یک ریشه سوم اولیه واحد روی  $Q$  باشد برای کدام میدان  $F$  گروه گالوای  $G = Gal_Q^F$  دوری خواهد بود؟

۲.  $F = Q(\alpha)$

۱.  $F = Q(\sqrt[3]{2}, \alpha)$

۴.  $F = Q(\sqrt[3]{2}, i)$

۳.  $F = Q(\alpha, i)$

۱۵- کدام گزینه صحیح می باشد؟

۱. اگر  $F$  توسیعی سره و متناهی از میدان  $R$  باشد آنگاه  $[F : R] = 2$

۲. اگر  $F$  توسیعی سره و متناهی از میدان اعداد مختلط  $C$  باشد آنگاه  $[F : C] = 2$

۳. اگر  $f(x)$  چندجمله ای تفکیک پذیر از درجه  $n$  باشد آنگاه  $n = o(Gal_Q^F)$

۴. گروه گالوای هر میدان متناهی از مشخصه عدد اول  $p$  روی  $F_p$  دوری است.

۱۶- فرض کنید  $\alpha$  یک ریشه  $n$ -ام اولیه روی میدان  $K$  و  $u^m \in F$  بطوریکه  $F = K(\alpha, u)$  در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. گروه  $Gal_K^F$  دوری است.

۲. گروه  $Gal_K^F$  حل پذیر است.

۳.  $F$  توسیعی نرمال از  $K$  است.

۴.  $F$  میدان شکافنده چندجمله ای  $x^m - u^m$  روی  $K$  است.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: جبر ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۲

۱۷- کدام گزینه صحیح است؟

۱. هر چندجمله ای درجه پنج در میدان اعداد گویا توسط رادیکالها حل پذیر است.
۲. هر چندجمله ای با ضرایب حقیقی روی میدان اعداد حقیقی توسط رادیکالها حل پذیر است.
۳. چندجمله ایهای با درجه بزرگتر از پنج حل پذیر نمی باشند.
۴. حداقل یک چندجمله ای درجه چهار وجود دارد که روی میدان اعداد گویا حل پذیر نیست.

۱۸- کدام گزینه ساخت پذیر است؟

۱. هفت ضلعی منتظم
۲. مربعی که مساحتش با مساحت یک دایره مقروض برابر است.

$$\theta = \frac{\pi}{9}$$

$$\sin \frac{\pi}{3}$$

۱۹- اگر  $\alpha$  یک ریشه  $n$ -ام اولیه واحد روی  $Q$  و  $F = Q(\alpha)$  آنگاه به ازای چه مقداری از  $n$  گروه گالوای  $Gal_K^F$  چهار عضوی خواهد بود؟

۱.  $n = 2$       ۲.  $n = 4$       ۳.  $n = 5$       ۴.  $n = 8$

۲۰- میدان شکافنده چندجمله ای  $f(x) = x^4 + 9$  روی میدان اعداد گویا برابر است با:

۱.  $Q(\sqrt{3}, i)$       ۲.  $Q(\sqrt{3} \pm i)$       ۳.  $Q(\pm\sqrt{3} \pm i)$       ۴.  $Q(i)$

### سوالات تشریحی

۱- فرض کنید  $G$  یک گروه و  $N \trianglelefteq G$  بطوریکه  $N, \frac{G}{N}$  حل پذیرند نشان دهید که  $G$  نیز حل پذیر است. ۱۰۰ نمره

۲- فرض کنید  $K$  یک میدان و  $f(x)$  یک چندجمله ای با ضرایب در  $K$  از درجه  $n$  باشد نشان دهید در اینصورت  $F$  که میدان شکافنده  $f(x)$  روی میدان  $K$  است وجود دارد بطوریکه:  $[F : K] \leq n!$  ۱۰۰ نمره

۳- نشان دهید که هر توسیع متناهی از یک میدان، یک توسیع جبری نیز می باشد. ۱۰۰ نمره

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: جبر ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (هندسه) ۱۱۱۱۰۴۲

۱۰۰۰ نمره

۴- فرض کنید  $\alpha$  یک ریشه  $m$ -ام اولیه واحد روی  $K$  و  $F = K(\alpha, u)$  که در آن  $u^m \in K$ . نشان دهید:

الف-  $F$  روی  $K$  نرمال است.

ب- گروه گالوای  $Gal_K^F$  حل پذیر است.

۳۰۰۰ نمره

۵- فرض کنید  $\alpha$  یک ریشه پنجم اولیه واحد روی  $Q$  و  $F = Q(\alpha)$  در اینصورت:

الف- نشان دهید  $[F:Q] = 4$ .

ب- چند جمله ای مینیمال  $\alpha$  را روی  $Q$  بدست آورید.

ج- گروه گالوا  $Gal_Q^F$  را بدست آورده و زیرگروههای آن و تمام میدانهای میانی  $F$  را روی  $Q$  بیابید.

شماره سوال	الف	ب	ج	د	پاسخ صحیح	وضعیت کلید
۱			X		د	عادی
۲		X			د	عادی
۳	X				ج	عادی
۴			X		الف	عادی
۵	X				ب	عادی
۶			X		الف	عادی
۷			X		ج	عادی
۸	X				ب	عادی
۹		X			د	عادی
۱۰				X	ب	عادی
۱۱	X				الف	عادی
۱۲			X		ج	عادی
۱۳				X	ج	عادی
۱۴			X		ب	عادی
۱۵	X				د	عادی
۱۶	X				الف	عادی
۱۷		X			ب	عادی
۱۸	X				د	عادی
۱۹	X				ج	عادی
۲۰		X			الف	عادی