

نام درس: آنالیز ریاضی (۲)

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

امام علی<sup>(ع)</sup>: شرافت به خرد و ادب است نه به دارایی و نژاد.

۱. اگر  $f$  تابعی کراندار و  $\alpha$  تابعی صعودی بر  $[a, b]$  باشند و  $P, Q$  دو افراز از  $[a, b]$  و  $P \subseteq Q$  باشند، آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

الف.  $L(P, f, \alpha) \leq L(Q, f, \alpha)$

ب.  $U(P, f, \alpha) \leq U(Q, f, \alpha)$

ج.  $L(P, f, \alpha) \leq U(Q, f, \alpha)$

د.  $L(Q, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

۲. اگر  $f, \alpha$  فقط در یک نقطه ناپیوسته باشند و  $g$  تابعی کراندار که فقط در  $k$  نقطه از بازه  $[a, b]$  ناپیوسته و در بقیه بازه پیوسته و  $\alpha$  در این  $k$  نقطه پیوسته باشد در مورد توابع  $f, g$  داریم:

الف.  $g \in R(\alpha), f \notin R(\alpha)$

ب.  $g \in R(\alpha), f \in R(\alpha)$

ج.  $g \notin R(\alpha), f \in R(\alpha)$

د.  $g \notin R(\alpha), f \notin R(\alpha)$

۳. اگر  $f, g \in R(\alpha)$  و  $c \in R, c \geq 0$  کدام گزینه درست نیست؟

الف.  $\int_a^b fd(c\alpha) = c \int_a^b fd\alpha$

ب.  $\int_a^b fd(\alpha + \beta) \leq \int_a^b fd\alpha + \int_a^b fd\beta$

ج.  $f \leq g \Rightarrow \int_a^b fd\alpha \leq \int_a^b gd\alpha$

د.  $\left| \int_a^b fd\alpha \right| \leq \int_a^b |f|d\alpha$

۴. انتگرال  $\int_a^{\frac{1}{4}} [px]d[x]$  داده شده است در مورد تابع زیر انتگرال و انتگرال پذیری آن چه می توان گفت؟

الف. پیوسته و انتگرال پذیر است.

ب. پیوسته ولی انتگرال ناپذیر نیست.

ج. نه پیوسته و نه انتگرال پذیر است.

د. پیوسته نیست ولی انتگرال پذیر است.

نام درس: آنالیز ریاضی (۲)

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۵. فرض کنید بر  $[a, b]$ ،  $f \in R(\alpha)$ ، و تابع  $F$  بر این بازه به صورت  $F(x) = \int_{\alpha}^x f d\alpha$  تعریف شده باشد. در این صورت

بر این بازه کدام گزینه همواره صحیح است؟

الف. اگر  $f$  پیوسته باشد آنگاه  $F$  نیز پیوسته است.ب. اگر  $\alpha$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $F$  پیوسته است.ج. اگر  $f$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $F$  است.د. اگر  $\alpha$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $F$  نیز مشتق پذیر است.

۶. تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  پیوسته و  $f(x)^p = \int_a^x f(t) dt$  تابع  $f$  کدام است؟

الف.  $\frac{x}{p}$       ب.  $\frac{x}{p} - \frac{a}{p}$       ج.  $\frac{ax}{p}$       د.  $ax$

۷. اگر  $g$  یک تابع نامنفی باشد به ازای کدام شرط اگر  $\int_a^{\infty} g$  موجود باشد آنگاه  $\int_a^{\infty} f$  موجود است؟

الف.  $f \leq g$       ب.  $|f| \leq g$       ج.  $g \leq |f|$       د.  $g \leq f$

۸. صحیح ترین جمله برای عبارت  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$  کدام است؟

الف. همگراست.      ب. واگراست.

ج. همگرای مطلق است.      د. همگرای مشروط است.

۹. می دانیم  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^p} dx$  لذا:

الف. هر دو واگرا هستند.      ب. هر دو همگرای مطلق هستند.

ج. یکی همگرای مطلق و دیگری همگرای مطلق نیست.      د. یکی همگرا و دیگری واگرا است.

نام درس: آنالیز ریاضی (۲)  
 رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)  
 تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
 زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
 آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗  
 کد سری سؤال: یک (۱)      استفاده از: —      مجاز است.

۱۰. کدام گزینه همواره درست است؟

الف. هر تابع کراندار، با تغییر کراندار است.

ب. هر تابع با تغییر کراندار با مشتق کراندار است.

ج. هر تابع با تغییر کراندار تفاضل دو تابع صعودی است.

د. هر تابع پیوسته و کراندار با تغییر کراندار است.

۱۱. دنباله  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$  بر  $R$  مفروض است در این صورت:

الف. حد  $f_n$  و  $f_n'$  موجود و با هم برابرند.      ب. حد  $f_n'$  موجود ولی حد  $f_n$  موجود نیست.

ج. حد  $f_n$  موجود ولی حد  $f_n'$  موجود نیست.      د. حد  $f_n$  و  $f_n'$  موجود نیستند.

۱۲. می‌دانیم  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  به طور یکنواخت همگراست آنگاه:

الف.  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  به طور یکنواخت کوشی است.

ب.  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  پیوسته است.

ج. اگر  $g_n$  به طور یکنواخت کراندار باشد  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$  به طور یکنواخت همگراست.

د.  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  به طور یکنواخت همگراست.

نام درس: آنالیز ریاضی (۲)

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۱۳. کدام گزاره در مورد  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$  درست است؟

الف. همگرایی آن به مقدار  $x$  بستگی دارد. ب. فقط در بازه  $[0, \infty)$  به طور یکنواخت همگراست.

ج. بر هیچ بازه‌ای به طور یکنواخت همگرا نیست. د. بر  $R$  به طور یکنواخت همگراست.

۱۴. به ازای چه مقادیری از  $\alpha$  سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin nx}{n^\alpha}$  بر بازه  $[0, 1]$  به طور یکنواخت همگراست؟

الف.  $\alpha \in R$  ب.  $\alpha > 0$  ج.  $\alpha < 0$  د.  $\alpha = 0$

۱۵. اگر  $X$  یک فضای متریک فشرده باشد و  $A \subseteq C(X)$  یک زیر جبر خود الحاقی باشد در کدام صورت خواهیم

داشت  $\overline{A} = C(X)$ ؟

الف.  $A$  بر  $X$  صفر نشود و نقاط  $X$  را جدا کند. ب.  $A$  نقاط  $X$  را جدا کند.

ج.  $A$  شامل توابع ثابت باشد. د.  $A$  بر  $X$  صفر نشود.

۱۶. شعاع همگرایی سری  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n!}$  کدام است؟

الف.  $\infty$  ب. صفر ج.  $\frac{1}{e}$  د. ۱

۱۷. اگر شعاع همگرایی سری  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  برابر  $R$  باشد شعاع همگرایی سری  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{kn}$  کدام است؟

الف.  $kR$  ب.  $R^k$  ج.  $R$  د.  $\frac{R}{k}$

نام درس: آنالیز ریاضی (۲)

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

۱۸. در کدام صورت همواره خواهیم داشت:  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$

الف.  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$  همگرا باشد.      ب.  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|$  همگرا باشد.

ج.  $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$  همگرا باشد.      د.  $\left| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right|$  همگرا باشد.

۱۹. اگر تابع نمایی  $E$  بر صفحه مختلط  $C$  با رابطه  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  تعریف شده است و اگر داشته باشیم

$E(x_1)E(x_p) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$  آنگاه  $c_n$  برابر است با:

الف.  $E(x_1 + x_p)$       ب.  $(x_1 + x_p)^n$

ج.  $\frac{(x_1 x_p)^n}{n!}$       د.  $\frac{(x_1 + x_p)^n}{n!}$

۲۰. کدام گزینه همواره درست است؟ ( $x > 0$ )

الف.  $e^x < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$       ب.  $x^n > \frac{(n+1)!e^x}{x}$

ج.  $x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x}$       د.  $e^x - 1 < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

نام درس: آنالیز ریاضی (۲)

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی (۱۱۱۱۰۴۱) - آمار (۱۱۱۱۰۸۸)

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: —

مجاز است.

## «سؤالات تشریحی»

بارم هر سؤال ۲ نمره می باشد.

۱. قضیه زیر را اثبات نمایید.

$$f \in R(\alpha) \Leftrightarrow \forall \varepsilon \exists P_\varepsilon \forall P(P_\varepsilon \subseteq P \Rightarrow (U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha)) < \varepsilon)$$

۲. نشان دهید که اگر  $f, g, h$  بر  $[a, b]$  نسبت به  $\alpha$  انتگرال پذیر باشد آنگاه:

$$\|f - h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - h\|_p$$

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{هرگاه } f \in R(\alpha) \text{ که } [a, b] \text{ بر } f \text{ تابع}$$

۳. گوئیم تابع  $f$  بر  $[a, b]$  در شرط یکنواخت لیبشیتز از مرتبه  $\alpha > 0$  صدق می کند اگر داشته باشیم:

$$\exists M \forall x, y : (|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha)$$

نشان دهید که اگر  $\alpha > 1$  آنگاه  $f$  تابعی است ثابت و اگر  $\alpha = 1$  آنگاه  $f$  با تغییر کراندار است.۴. اگر  $\{f_n\}$  دنباله ای از توابع کراندار باشد که به طور یکنواخت همگراست. نشان دهید این دنباله به طور یکنواخت کراندار است.

۵. شعاع همگرایی سریهای زیر را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4^n + 5^n)x^n \quad \text{ب.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ex)^n}{n^{\sqrt{n}}} \quad \text{الف.}$$