

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۵۰۳۲۵-۲۴۱۱۵۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد کل صفحات: ۶

۱. کدام گزینه صحیح است؟

الف. اگر p, p' دو افراز از $[a, b]$ باشند و $p \subset p'$ آنگاه p ظریفتر از p' است.ب. اگر $p \subset p'$ آنگاه $L(p, f, \alpha) \leq L(p', f, \alpha)$ ج. اگر $p \subset p'$ آنگاه $L(p', f, \alpha) \leq L(p, f, \alpha)$ د. اگر $p \subset p'$ آنگاه $u(p, f, \alpha) \leq u(p', f, \alpha)$ ۲. اگر f بر $[a, b]$ محدود و α و β بر $[a, b]$ صعودی باشد کدام گزینه غلط است؟الف. اگر $f \in R(\alpha)$ پیوسته باشد $f \in R(\beta)$ ب. $f \in R(\alpha)$ اگر و فقط اگر $\forall \varepsilon > 0 \exists p_\varepsilon \forall p(p_\varepsilon \subseteq p \Rightarrow u(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) < \varepsilon)$ ج. اگر f صعودی باشد آنگاه $f \in R(\alpha)$ د. اگر f و α در $x_0 \in [a, b]$ راست ناپیوسته باشند آنگاه $f \notin R(\alpha)$ ۳. اگر f تابعی بر $[a, b]$ ، $|f'(x)| < M$ و p افرازی از $[a, b]$ با زیر بازه‌هایی با طول مساوی $h = \frac{b-a}{n}$ ونقاط x_0, x_1, \dots, x_n ، $f(x_i) = y_i$ کدام گزینه صحیح است؟الف. $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})h$ ب. $\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$ ج. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f - f(x_i)| \leq Mh^2$

د. هر سه مورد فوق

۴. کدام گزینه غلط است؟

الف. $E \subset R$ دارای اندازه صفر است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ تعداد شمارا بازه باز موجود بطوریکه $E \subset \bigcup_n I_n$ و $\sum_n l(I_n) < \varepsilon$ که $l(I_n)$ طول بازه است.

ب. اعداد گویا دارای اندازه صفرند.

ج. اگر E دارای اندازه‌ی صفر باشد، هره زیر مجموعه‌ی آن نیز دارای اندازه صفر است.

د. اعداد اصم دارای اندازه صفرند.

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۵۰۳۲۵-۲۴۱۱۵۱

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

۵. کدام تابع بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر ریمانی نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \text{ اصم} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \end{cases}$$

ب. $f(x) = [x]$ ج. $f(x)$ مانند گزینه الف می باشد و $g(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ که در آن $h = g \circ f$ د. $f(x) = x[2x]$

۶. کدام گزینه غلط است؟

الف. اگر f بر $[a, b]$ نسبت به تابع صعودی α انتگرال پذیر باشد آنگاه $f \circ \alpha \in R[a, b]$ ب. اگر $\alpha' \in R[a, b]$ موجود و $\alpha' \in R[a, b]$ و $f \in R(\alpha)$ آنگاه $f \alpha' \in R[a, b]$ ج. اگر f بر $[a, b]$ تابعی ثابت باشد آنگاه $f \in R(\alpha)$ د. اگر f فقط در نقاط گویای بازه $[a, b]$ ناپیوسته و در نقاط اصم پیوسته باشد آنگاه $f \in R[a, b]$ ۷. کدام تابع بر $[0, 1]$ با تغییر کراندار است؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \notin Q \end{cases} \text{ الف.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ ب.}$$

ج. هر تابع کراندار بر $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ د.}$$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۵۰۳۲۵-۲۴۱۱۵۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۸. کدام گزینه صحیح است؟

الف. اگر $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (بر E) آنگاه $f_n \Rightarrow f$ (بر E)ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+n^p x^p)}$ بر R همگرای یکنواخت است.ج. $f_n(x) = \frac{x^{pn}}{1+x^{pn}}$ بر R همگرای یکنواخت است.د. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in (r_1, \dots, r_n) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ که r_n دنباله‌ای اعداد گویا در $[0, 1]$ است همگرای یکنواخت است.۹. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع بر $[a, b]$ باشد کدام گزینه غلط است؟الف. اگر $f_n \Rightarrow f$ آنگاه $f'_n \Rightarrow f'$ ب. اگر $f_n \Rightarrow f$ و هر f_n پیوسته باشد، f نیز پیوسته است.ج. اگر $f_n \Rightarrow f$ و هر f_n انتگرالپذیر ریمانی باشد، آنگاه f نیز انتگرالپذیر ریمانی است.د. اگر $f_n \Rightarrow f$ آنگاه $f_n(x) \rightarrow f(x)$

۱۰. کدام گزینه غلط است؟

الف. دنباله‌ای $\{f_n\}$ بر مجموعه‌ای E به طور نقطه وار کراندار است، اگر به ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $|f_n(x)| < M_x$.ب. اگر $\{f_n\}$ کراندار نقطه‌ای بر E باشد، آنگاه $\{f_n\}$ دارای زیر دنباله‌ای همگرا بر E است.ج. اگر $\{f_n\}$ کراندار نقطه‌ای بر Q باشد آنگاه دارای زیر دنباله‌ای همگرا بر Q است.

د. هر دنباله‌ای بطور یکنواخت همگرا از توابع لزوماً دارای زیر دنباله‌ای همگرا نیست.

۱۱. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع بر $[a, b]$ باشد کدام گزینه درست است؟الف. اگر به ازای هر n ، $f_n \in R(\alpha)$ ، بطور یکنواخت به S همگرا باشد، آنگاه $S \in R(\alpha)$ ب. شرط لازم و کافی برای آنکه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ همگرای یکنواخت باشد آن است که به طور یکنواخت کشی باشد.ج. اگر $\{M_n\}$ دنباله‌ای نامنفی از اعداد و $\sum M_n$ همگرا باشد و $|f_n(x)| < M_n$ آنگاه $\sum f_n$ همگرای یکنواخت است.

د. هر سه مورد فوق صحیح است.

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۴۱۱۵۱-۲۵۰۳۲۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۲. کدام انتگرال همگراست؟

الف. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

ب. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

ج. $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$ where $f(x) = (n-1)^{n-1}$ for $(n-1) \leq x < n$

د. هیچکدام

۱۳. کدام گزینه غلط است؟

الف. شعاع همگرایی $\sum n! x^n$ برابر $R = \infty$ است

ب. هر دنباله از توابع کراندار که به طور یکنواخت همگرا باشند، بطور یکنواخت کراندارند.

ج. شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ، $R = \infty$ است.د. اگر $|x| < R$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ بطور مطلق همگراست.

۱۴. کدام گزینه غلط است؟

الف. سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ دارای شعاع همگرایی یکسانند.ب. سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ دارای شعاع همگرایی یکسانند.ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ بر $(0, \infty)$ همگرای یکنواخت است.د. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ دارای شعاع همگرایی $R = 1$ است.

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۵۰۳۲۵-۲۴۱۱۵۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۵. کدام گزینه غلط است؟

الف. اگر f بر R پیوسته باشد، آنگاه f مشتق پذیر است.ب. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ به طور یکنواخت همگرا و $\{g_n\}$ کراندار یکنواخت باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ همگرای یکنواخت است.ج. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$ به طور یکنواخت همگرا و g کراندار باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ همگرای یکنواخت است.د. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 x + 1}$ بر $(0, \infty)$ همگرا است.۱۶. اگر X یک فضای متریک فشرده باشد آنگاهالف. $C(X)$ یک فضای متریک است.ب. اگر $F \subset C(X)$ زیر فضای بسته‌ای از $C(X)$ باشیم آنگاه F هم پیوسته است.ج. $C(X)$ کامل است.

د. الف و ج

۱۷. اگر $C[0,1]$ فضای توابع حقیقی و پیوسته بر $[0,1]$ باشد آنگاه:الف. اگر A مجموعه‌ی تمام چند جمله‌ایها بر X باشد، آنگاه $\bar{A} = C[0,1]$ ب. اگر $AC \subseteq [0,1]$ یک زیر جبر باشد که نقاط $[0,1]$ را جدا کند و بر آن صفر نشود، $\bar{A} = C[0,1]$ ج. $f_n \in C[0,1]$ کراندار نقطه‌ای و همپیوسته‌اند آنگاه $\{f_n\}$ به طور یکنواخت کراندارند

د. هر سه مورد فوق

۱۸. کدام گزینه غلط است؟

الف. تابع $E(x) = e^x$ اکیداً صعودی است.ب. $L(y) = \int_1^y \frac{dt}{t}$ که $y \in (0, \infty)$ ، همواره مثبت است.ج. اگر $x > 0$ آنگاه $(x^{\sqrt{3}})' = \sqrt{3} x^{\sqrt{3}-1}$ د. تابع $E(x) = e^x$ مشتق پذیر است. (بر \mathbb{R})

۱۹. کدام گزینه صحیح است؟

الف. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-a} \ln x = \infty$ ($a > 0$)ب. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-a} \ln x = 0$ ($a > 0$)ج. اگر $0 < t < 2\pi$ آنگاه $|E(it)| \geq 1$

د. الف و ج

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۵ - تشریحی

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۴۱۱۵۱

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۲۰. کدام گزینه صحیح است؟

الف. خانواده $R = \{R_0, R_1, \dots\}$ که $R_n(x) = \text{sgn}(\sin 2^n \pi x)$ $0 \leq x \leq 1$ $n = 0, 1, 2, \dots$ بر $[0, 1]$ یکامتعامدند.

ب. اگر $\{\varphi_n\}$ یک خانواده ی یکامتعامد بر $[a, b]$ و f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

ج. $C_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log n$ همگراست.

د. هر سه مورد فوق

سوالات تشریحی

۱. محک لبگ برای انتگرالپذیری ریمان را بیان و اثبات کنید.

۲. شرط لازم و کافی برای آنکه $f_n \Rightarrow f$ بر E آن است که $\sigma_n = \sup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

۳. اگر $\{\varphi_n\}$ یک خانواده ی یکامتعامد بر $[a, b]$ و f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

۴. فرض کنید $f: R \rightarrow R$ پیوسته یکنواخت باشد و $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ نشان دهید $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f

همگراست.

۵. نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ بر $[0, \infty)$ به طور یکنواخت همگراست ولی بطور مطلق همگرا نیست.