

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی-آمار

کد درس: ۲۵۰۳۲۵-۲۴۱۱۵۱

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

۱. کدام گزینه صحیح است؟

الف. اگر  $p, p'$  دو افراز از  $[a, b]$  باشند و  $p \subset p'$  آنگاه  $p$  ظریفتر از  $p'$  است.ب. اگر  $p \subset p'$  آنگاه  $L(p, f, \alpha) \leq L(p', f, \alpha)$ ج. اگر  $p \subset p'$  آنگاه  $L(p', f, \alpha) \leq L(p, f, \alpha)$ د. اگر  $p \subset p'$  آنگاه  $u(p, f, \alpha) \leq u(p', f, \alpha)$ ۲. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  محدود و  $\alpha$  و بر  $[a, b]$  صعودی باشد کدام گزینه غلط است؟الف. اگر  $f$  پیوسته باشد  $f \in R(\alpha)$ ب.  $f \in R(\alpha)$  اگر و فقط اگر  $\forall \varepsilon > 0 \exists p_\varepsilon \forall p(p_\varepsilon \subseteq p \Rightarrow u(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) < \varepsilon)$ ج. اگر  $f$  صعودی باشد آنگاه  $f \in R(\alpha)$ د. اگر  $f$  و  $\alpha$  در  $x_0 \in [a, b]$  راست ناپیوسته باشند آنگاه  $f \notin R(\alpha)$ ۳. اگر  $f$  تابعی بر  $[a, b]$ ،  $|f'(x)| < M$  و  $p$  افرازی از  $[a, b]$  با زیر بازه‌هایی با طول مساوی  $h = \frac{b-a}{n}$  ونقاط  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ،  $f(x_i) = y_i$  کدام گزینه صحیح است؟الف.  $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1})h$ ب.  $\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$ ج.  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f - f(x_i)| \leq Mh^2$ 

د. هر سه مورد فوق

۴. کدام گزینه غلط است؟

الف.  $E \subset R$  دارای اندازه صفر است اگر به ازای هر  $\varepsilon > 0$  تعداد شمارا بازه باز موجود بطوریکه  $E \subset \bigcup_n I_n$ و  $\sum_n l(I_n) < \varepsilon$  که  $l(I_n)$  طول بازه است.

ب. اعداد گویا دارای اندازه صفرند.

ج. اگر  $E$  دارای اندازه‌ی صفر باشد، هره زیر مجموعه‌ی آن نیز دارای اندازه صفر است.

د. اعداد اصم دارای اندازه صفرند.

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۴۱۱۵۱-۲۵۰۳۲۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: هفتی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

۵. کدام تابع بر  $[0, 1]$  انتگرال پذیر ریمانی نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \text{ اصم} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \end{cases}$$

ب.  $f(x) = [x]$ ج.  $f(x)$  مانند گزینه الف می باشد و  $g(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  که در آن  $h = g \circ f$ د.  $f(x) = x[2x]$ 

۶. کدام گزینه غلط است؟

الف. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  نسبت به تابع صعودی  $\alpha$  انتگرال پذیر باشد آنگاه  $f \circ \alpha \in R[a, b]$ ب. اگر  $\alpha' \in R[a, b]$  موجود و  $\alpha' \in R[a, b]$  و  $f \in R(\alpha)$  آنگاه  $f \alpha' \in R[a, b]$ ج. اگر  $f$  بر  $[a, b]$  تابعی ثابت باشد آنگاه  $f \in R(\alpha)$ د. اگر  $f$  فقط در نقاط گویای بازه  $[a, b]$  ناپیوسته و در نقاط اصم پیوسته باشد آنگاه  $f \in R[a, b]$ ۷. کدام تابع بر  $[0, 1]$  با تغییر کراندار است؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \notin Q \end{cases} \text{ الف.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ ب.}$$

ج. هر تابع کراندار بر  $[a, b]$ 

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ د.}$$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۵۰۳۲۵-۲۴۱۱۵۱

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد کل صفحات: ۶

۸. کدام گزینه صحیح است؟

الف. اگر  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  (بر  $E$ ) آنگاه  $f_n \Rightarrow f$  (بر  $E$ )ب.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+n^p x^p)}$  بر  $R$  همگرای یکنواخت است.ج.  $f_n(x) = \frac{x^{pn}}{1+x^{pn}}$  بر  $R$  همگرای یکنواخت است.د.  $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in (r_1, \dots, r_n) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$  که  $r_n$  دنباله‌ای اعداد گویا در  $[0, 1]$  است همگرای یکنواخت است.۹. اگر  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع بر  $[a, b]$  باشد کدام گزینه غلط است؟الف. اگر  $f_n \Rightarrow f$  آنگاه  $f'_n \Rightarrow f'$ ب. اگر  $f_n \Rightarrow f$  و هر  $f_n$  پیوسته باشد،  $f$  نیز پیوسته است.ج. اگر  $f_n \Rightarrow f$  و هر  $f_n$  انتگرالپذیر ریمانی باشد، آنگاه  $f$  نیز انتگرالپذیر ریمانی است.د. اگر  $f_n \Rightarrow f$  آنگاه  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ 

۱۰. کدام گزینه غلط است؟

الف. دنباله‌ای  $\{f_n\}$  بر مجموعه‌ای  $E$  به طور نقطه وار کراندار است، اگر به ازای هر عدد طبیعی  $n$  داشته باشیم  $|f_n(x)| < M_x$ .ب. اگر  $\{f_n\}$  کراندار نقطه‌ای بر  $E$  باشد، آنگاه  $\{f_n\}$  دارای زیر دنباله‌ای همگرا بر  $E$  است.ج. اگر  $\{f_n\}$  کراندار نقطه‌ای بر  $Q$  باشد آنگاه دارای زیر دنباله‌ای همگرا بر  $Q$  است.

د. هر دنباله‌ای بطور یکنواخت همگرا از توابع لزوماً دارای زیر دنباله‌ای همگرا نیست.

۱۱. اگر  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع بر  $[a, b]$  باشد کدام گزینه درست است؟الف. اگر به ازای هر  $n$ ،  $f_n \in R(\alpha)$ ، بطور یکنواخت به  $S$  همگرا باشد، آنگاه  $S \in R(\alpha)$ ب. شرط لازم و کافی برای آنکه  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  همگرای یکنواخت باشد آن است که به طور یکنواخت کشی باشد.ج. اگر  $\{M_n\}$  دنباله‌ای نامنفی از اعداد و  $\sum M_n$  همگرا باشد و  $|f_n(x)| < M_n$  آنگاه  $\sum f_n$  همگرای یکنواخت است.

د. هر سه مورد فوق صحیح است.

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۴۱۱۵۱-۲۵۰۳۲۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۲. کدام انتگرال همگراست؟

الف.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

ب.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

ج.  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$  where  $f(x) = \frac{(n-1)^{n-1}}{n}$  for  $(n-1) \leq x < n$

د. هیچکدام

۱۳. کدام گزینه غلط است؟

الف. شعاع همگرایی  $\sum n! x^n$  برابر  $R = \infty$  است

ب. هر دنباله از توابع کراندار که به طور یکنواخت همگرا باشند، بطور یکنواخت کراندارند.

ج. شعاع همگرایی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ،  $R = \infty$  است.د. اگر  $|x| < R$  آنگاه  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$  بطور مطلق همگراست.

۱۴. کدام گزینه غلط است؟

الف. سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  دارای شعاع همگرایی یکسانند.ب. سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$  دارای شعاع همگرایی یکسانند.ج.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$  بر  $[0, \infty)$  همگرای یکنواخت است.د.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  دارای شعاع همگرایی  $R = 1$  است.

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی-آمار

کد درس: ۲۴۱۱۵۱-۲۵۰۳۲۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۵. کدام گزینه غلط است؟

الف. اگر  $f$  بر  $R$  پیوسته باشد، آنگاه  $f$  مشتق پذیر است.ب. اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  به طور یکنواخت همگرا و  $\{g_n\}$  کراندار یکنواخت باشد،  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$  همگرای یکنواخت است.ج. اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$  به طور یکنواخت همگرا و  $g$  کراندار باشد،  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$  همگرای یکنواخت است.د.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 x + 1}$  بر  $(0, \infty)$  همگرا است.۱۶. اگر  $X$  یک فضای متریک فشرده باشد آنگاهالف.  $C(X)$  یک فضای متریک است.ب. اگر  $F \subset C(X)$  زیر فضای بسته‌ای از  $C(X)$  باشیم آنگاه  $F$  هم پیوسته است.ج.  $C(X)$  کامل است.

د. الف و ج

۱۷. اگر  $C[0,1]$  فضای توابع حقیقی و پیوسته بر  $[0,1]$  باشد آنگاه:الف. اگر  $A$  مجموعه‌ی تمام چند جمله‌ایها بر  $X$  باشد، آنگاه  $\bar{A} = C[0,1]$ ب. اگر  $AC \subseteq [0,1]$  یک زیر جبر باشد که نقاط  $[0,1]$  را جدا کند و بر آن صفر نشود،  $\bar{A} = C[0,1]$ ج.  $f_n \in C[0,1]$  کراندار نقطه‌ای و همپیوسته‌اند آنگاه  $\{f_n\}$  به طور یکنواخت کراندارند

د. هر سه مورد فوق

۱۸. کدام گزینه غلط است؟

الف. تابع  $E(x) = e^x$  اکیداً صعودی است.ب.  $L(y) = \int_1^y \frac{dt}{t}$  که  $y \in (0, \infty)$ ، همواره مثبت است.ج. اگر  $x > 0$  آنگاه  $(x^{\sqrt{3}})' = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$ د. تابع  $E(x) = e^x$  مشتق پذیر است. (بر  $\mathbb{R}$ )

۱۹. کدام گزینه صحیح است؟

الف.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-a} \ln x = \infty$  ( $a > 0$ )ب.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-a} \ln x = 0$  ( $a > 0$ )ج. اگر  $0 < t < 2\pi$  آنگاه  $|E(it)| \geq 1$ 

د. الف و ج

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - آمار

کد درس: ۲۴۱۱۵۱

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۲۰. کدام گزینه صحیح است؟

الف. خانواده  $R = \{R_0, R_1, \dots\}$  که  $R_n(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^n \pi x)$   $0 \leq x \leq 1$   $n = 0, 1, 2, \dots$  بر  $[0, 1]$  یکامتعامدند.

ب. اگر  $\{\varphi_n\}$  یک خانواده ی یکامتعامد بر  $[a, b]$  و  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر باشد آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

ج.  $C_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \log n$  همگراست.

د. هر سه مورد فوق

سوالات تشریحی

۱. محک لبگ برای انتگرالپذیری ریمان را بیان و اثبات کنید.

۲. شرط لازم و کافی برای آنکه  $f_n \Rightarrow f$  بر  $E$  آن است که  $\sigma_n = \sup_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

۳. اگر  $\{\varphi_n\}$  یک خانواده ی یکامتعامد بر  $[a, b]$  و  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرالپذیر باشد آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

۴. فرض کنید  $f: R \rightarrow R$  پیوسته یکنواخت باشد و  $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$  نشان دهید  $\{f_n\}$  به طور یکنواخت به  $f$

همگراست.

۵. نشان دهید سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$  بر  $[0, \infty)$  به طور یکنواخت همگراست ولی بطور مطلق همگرا نیست.