



تعداد سؤالات: نسی ۲۰ تکمیلی ۵۰ تفریحی ۵
زمان امتحان: نسی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه
تعداد کل صفحات: ۵

نام درس: آمار و احتمال ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - علوم کامپیوتر

کد درس: ۲۴۱۱۹۱-۲۶۳۱۲۵

* استفاده از ماشین حساب مجاز می باشد.

۱. اگر متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، چگالی قدر مطلق آن کدام است؟

الف. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ ب. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t}{2}}$ ج. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ د. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

۲. اگر X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با میانگین یک باشد، آن گاه توزیع $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$ عبارت است از:

الف. نمایی با میانگین n ب. نرمال

ج. گاما با پارامترهای n و ۱ د. نمایی با میانگین $\frac{1}{n}$

۳. X_1, X_2, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} & , x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ می باشد، در این صورت توزیع $Y = \frac{X_1}{X_n}$ عبارت است از:

الف. $U(0,1)$ ب. $\chi^2(1)$ ج. $\Gamma(p,p)$ د. $F(p,p)$
(U - توزیع یکنواخت، Γ - گاما)

۴. اگر X دارای چگالی احتمال: $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ - $-\infty < x < \infty$ آن گاه توزیع $Y = \frac{1}{1+e^{-X}}$ کدام است؟ (بتا- β)

الف. $t(p)$ ب. نمایی با پارامتر ۲ ج. $\beta(p,p)$ د. $U(0,1)$

۵. برای جامعه متناهی: $\{C_1, C_2, \dots, C_N\}$ میانگین و واریانس عبارتند از:

الف. $\mu = \frac{1}{N}$, $\sigma^2 = \sum C_i^2 \frac{1}{N}$ ب. $\mu = \sum C_i \frac{1}{N-1}$, $\sigma^2 = \sum (C_i - \mu)^2 \frac{1}{N}$

ج. $\mu = \sum C_i \frac{1}{N}$, $\sigma^2 = \frac{\sum C_i^2}{N} - \mu^2$ د. $\mu = \sum C_i \frac{1}{N}$, $\sigma^2 = \sum C_i^2 \frac{1}{N} - \sum C_i \frac{1}{N}$

۶. اگر متغیر تصادفی Y دارای توزیع کای دوبا ۴ درجه آزادی و Z دارای توزیع نرمال استاندارد

(و مستقل از هم) باشند، آن گاه متغیر تصادفی $\frac{\sqrt{2}Z}{\sqrt{Y}}$ دارای چه توزیعی است؟

الف. $F(1,2)$ ب. $t(3)$ ج. $t(4)$ د. $\chi^2(p)$

تعداد سؤالات: نهمی ۲۰ تکمیلی ۵ تشریحی ۵
زمان امتحان: نهمی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه
تعداد کل صفحات: ۵

نام درس: آمار و احتمال ۲
رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - علوم کامپیوتر
کد درس: ۲۴۱۱۹۱ ۲۶۳۱۲۵

۷. X_1, X_2, \dots, X_n نمونه ای تصادفی از توزیعی با میانگین $\mu = 5$ و انحراف معیار ۳ می باشد. برای n به اندازه

کافی بزرگ، توزیع $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ عبارت است از:

الف. نرمال با میانگین ۵ واریانس ۹

ب. نرمال با میانگین ۵ واریانس ۹

ج. کای دو با $n-1$ درجه آزادی

د. کای دو با $n-1$ درجه آزادی

۸. به ازای چه مقدار K برآوردگر $\hat{\theta} = KX$ برآورد کننده نااریب θ از جامعه ای با چگالی زیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & , 0 < x < \theta \\ 0 & , \text{جای دیگر} \end{cases}$$

الف. ۱

ب. ۲

ج. $\frac{1}{\theta}$

د. هیچ مقداری

۹. متغیر تصادفی X با توزیع زیر مفروض است:

$$f(x) = \begin{cases} \theta(1-\theta)^x & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{جای دیگر} \end{cases}$$

با فرض $0 < \theta < 1$ و انتخاب نمونه ای تصادفی به اندازه n از این جامعه، برآورد کننده θ به روش MLE (= درست نمایی ماکسیمم) عبارت است از:

$$\bar{X} \quad \text{الف.} \quad \frac{\bar{X}}{1+\bar{X}} \quad \text{ب.} \quad \frac{1}{\bar{X}+1} \quad \text{ج.} \quad \frac{1}{\bar{X}} \quad \text{د.}$$

۱۰. اگر X_1, X_2, \dots, X_n مقادیر نمونه ای تصادفی به اندازه n از جامعه یکنواخت، پیوسته در فاصله $(0, \beta)$ باشد، برآورده کننده درست‌نمایی ماکسیمم β عبارت است از:

$$Y_1 \quad \text{الف.} \quad \frac{1}{\bar{X}} \quad \text{ب.} \quad Y_n \quad \text{ج.} \quad \left(\frac{1}{\bar{X}}\right)^n \quad \text{د.}$$

(Y_1 : اولین آماره ترتیبی و Y_n : n امین آماره ترتیبی)

۱۱. فرض کنید $\sum_{i=1}^4 X_i^2 = 109$ ، $\sum_{i=1}^4 X_i = 4$ در این صورت مقدار برآورد نااریب واریانس جامعه کدام است؟

الف. ۳۱

ب. $36/2$

ج. $23/2$

د. ۳۵



تعداد سوال: نهمی ۲۰ تکمیلی ۵
زمان امتحان: نهمی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تفریحی ۶۰ دقیقه
تعداد کل صفحات: ۵

نام درس: آمار و احتمال ۲
رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - علوم کامپیوتر
کد درس: ۲۴۱۱۹۱-۲۴۳۱۲۵

۱۲. نمونه تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n را از توزیعی با چگالی زیر در نظر می گیریم:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} 2(\theta - x) \cdot \theta^{-2} & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{جای دیگر} \end{cases}$$

عبارت است از:

الف. \bar{x} ب. $\frac{1}{3}\bar{x}$ ج. $3\bar{x}$ د. $\frac{1}{9}\bar{x}$

۱۳. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای میانگین یک جامعه نرمال با واریانس معلوم σ^2 به صورت $\bar{x} \pm 1/96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ می باشد اگر بخواهیم طول این فاصله را به نصف کاهش دهیم لازم است که:

الف. تعداد نمونه را دو برابر کنیم ب. تعداد نمونه را چهار برابر کنیم
ج. σ را نصف کنیم د. σ را دو برابر کنیم

۱۴. سکه ای را برای بررسی سالم بودن آن سه مرتبه پرتاب می کنیم اگر ملاک رد فرضیه سالم بودن سکه، مشاهده ۳ شیر یا ۳ خط باشد، احتمال خطای نوع اول برابر است با:

الف. ۰/۷۵ ب. ۰/۲۵ ج. ۰/۶۲۵ د. ۰/۱۲۵

۱۵. توان آزمون برابر است با:

الف. رد فرضی که غلط است. ب. رد فرضی که درست است.
ج. قبول فرضی که غلط است. د. قبول فرضی که درست است.

۱۶. اگر میانگین نمونه ای تصادفی ۱۰۰ تایی از X مساوی ۳۰ با انحراف معیار ۵ باشد، و میانگین نمونه ۲۰۰ تایی از Y مساوی ۲۵ با انحراف معیار ۱۰ باشد، مقدار آماره آزمون برای آزمون صفر بودن تفاوت میانگین ها برابر است با:

الف. ۵/۷۷ ب. ۱۵/۸ ج. ۳/۴۰ د. ۱/۹۶

۱۷. اگر X_1, X_2, \dots, X_n نمونه ای تصادفی از توزیع پواسن با پارامتر λ باشد، با در نظر گرفتن میانگین نمونه ای $(\bar{X} =)$ و واریانس نمونه ای $(S^2 =)$ کدام عبارت درست است؟

الف. \bar{X} برآوردگر نارایب و S^2 یک برآوردگر اریب λ است.

ب. \bar{X} و S^2 هر دو برای λ نارایب با واریانس های یکسان می باشند.

ج. \bar{X} و S^2 دو برآوردگر نارایب λ هستند اما واریانس S^2 کمتر از واریانس \bar{X} است.

د. \bar{X} و S^2 هر دو برآوردگرهای نارایب λ هستند اما واریانس \bar{X} کمتر از واریانس S^2 است.

۱۸. اگر برای یک نمونه تصادفی به اندازه ۱۶ از جامعه ای نرمال داشته باشیم $\bar{x} = ۲۵۰$ ، $S = ۴$ و برای $\alpha = ۰/۰۵$ داشته باشیم:

$$z_{1-\alpha/2} = 1/96, \quad z_{1-\alpha} = 1/65, \quad t_{(16)} = 2/12, \quad t_{(15)} = 2/13$$

آن گاه یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای μ عبارت است از:

الف. (۲۴۷/۸۷ ، ۲۵۲/۱۳) ب. (۲۴۷/۸۸ ، ۲۵۲/۱۲)
ج. (۲۴۸/۰۴ ، ۲۵۱/۹۶) د. (۲۴۸/۳۵ ، ۲۵۱/۶۵)

تعداد سوالات: نفي ۲۰ تکميلي ۵ تشریحي ۵

زمان امتحان: تستي و تکميلي ۶۰ نفي و تشریحي ۶۰ نفي

تعداد کل صفحات: ۵

نام درس: آمار و احتمال ۲

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی - علوم کامپیوتر

کد درس: ۲۴۱۱۹۱ ۲۶۳۱۲۵

۱۹. برای مقایسه دو جامعه داده های زیر را در اختیار داریم. با فرض نرمال و مستقل بودن ۲۸ جامعه و یکسانی واریانس ها، مقدار آماره آزمون برای مساوی بودن میانگین دو جامعه کدام است؟

X جامعه اول:	۸	۷	۴	۷	۹
Y جامعه دوم:	۸	۶	۵	۴	۷

$$\sqrt{\frac{5}{6}}$$

د.

$$\frac{5}{6}$$

ج.

$$\frac{6}{5}$$

ب.

$$\sqrt{\frac{6}{5}}$$

الف.

۲۰. اداره آموزش و پرورش ناحیه ای از یک شهرداری کرده است که فقط ۲۰٪ از افراد ۶ سال به بالای این ناحیه بی سواد هستند. به منظور بررسی ادعای فوق از بین جمعیت ۶ ساله به بالا ۱۰۰ نفر به طور تصادفی انتخاب شد، معلوم شد که ۲۵ نفر آنها بی سوادند. فرضیه H_1 کدام گزینه است؟

$$P < 0.25$$

د.

$$P > 0.2$$

ج.

$$P < 0.2$$

ب.

$$P > 0.25$$

الف.

سوالات تشریحي

۱. فرض می کنیم چگالی توأم X, Y به صورت زیر می باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} ye^{-(x+y)} & , 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & , \text{جای دیگر} \end{cases}$$

چگالی توأم $U = X$ ، $V = X + Y$ و نیز چگالی حاشیه ای $X, Y, X + Y$ را بیابید.

۲. الف. اگر \bar{X} ، S^2 میانگین و واریانس نمونه ای تصادفی به اندازه n از جامعه نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2

باشد، ثابت کنید: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t با $n-1$ درجه آزادی است.

ب. فرض کنید X_1, \dots, X_p نمونه ای تصادفی به اندازه ۲ از چگالی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}x} & , 0 < x < \infty \\ 0 & , \text{جای دیگر} \end{cases}$$

تعیین کنید.

۳. نشان دهید که میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه n ، برآوردکننده، ناریب با کمترین واریانس پارامتر « λ » جامعه پواسن است. آیا این برآورد کننده سازگار است؟



نام درس: آمار و احتمال ۲

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی ۵ تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ تشریحی ۶۰

کد درس: ۲۴۱۱۹۱-۲۶۳۱۲۵

تعداد کل صفحات: ۵

۴. الف. یک درس ریاضی در یک کلاس ۹ نفری توسط معلم A و در یک کلاس ۷ نفری توسط معلم B تدریس شده است. در پایان یک امتحان استاندارد به هر دو کلاس داده شد که برای نمرات نتایج زیر به دست آمده است.

$$\bar{X} = ۸۵, S_1 = ۴, \bar{Y} = ۸۱, S_2 = ۵$$

با فرض نرمال بودن و مستقل بودن نمرات، فرض برابری واریانس ها را در سطح $\alpha = ۰/۱۰$ آزمون کنید

ب. اگر برای این مسأله، فرض $\sigma_1^2 = \sigma^2 = \sigma^2$ را بپذیریم، یک فاصله اطمینان ۱۰٪ برای تفاوت میانگین های واقعی

به دست آورید و نتیجه آن را با نتیجه حاصل از قسمت الف مقایسه کنید:

$$t_{۰/۹۵}(۱۴) = ۱/۷۶, F_{۰/۰۵}(۸,۶) = ۰/۲۸, F_{۰/۹۵}(۸,۶) = ۴/۱۵$$

۵. قضایای: «الف. قضیه حد مرکزی» و «ب. لم نیمن پیرسن» را به طور دقیق و کامل بیان کنید (اثبات مورد نظر نیست).