

مجاز است.

استفاده از:

۱. فرض کنید A مجموعه ای غیر خالی از اعداد حقیقی و از پائین کراندار باشد و $\alpha = \inf A$. در این صورت کدام عبارت نادرست است؟

- الف. α یک کران پائین A است.
ب. α بزرگترین کران پائین A است.
ج. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha + \varepsilon < x$
د. $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \alpha - \varepsilon < x$

۲. برای دنباله $\{a_n\}$ با جمله عمومی $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \cos n\pi$ کدام عبارت درست است؟

- الف. $\lim a_n = \frac{1}{e}$
ب. $\lim a_n = e$
ج. $\lim a_n = e$
د. $\lim a_n = -\frac{1}{e}$

۳. کدام عبارت درست است:

- الف. سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ برای $\alpha > 1$ واگرا و برای $\alpha \leq 1$ همگرا است.
ب. سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ واگراست.
ج. اگر $x > 0$ باشد در این صورت سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ واگراست.
د. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ ، $b_n = a_{n+1}$ در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S - a_1$

۴. در مجموعه اعداد طبیعی N با متریک معمولی R ، هر گوی باز به مرکز x و به شعاع ۲ عبارتست از:

- الف. \emptyset
ب. $\{x\}$
ج. $\{x-1, x, x+1\}$
د. دایره ای به شعاع ۲

۵. در فضای متری (M, d) کدام عبارت درست است؟

- الف. اجتماع هر خانواده از مجموعه های باز، باز است.
ب. اشتراک هر خانواده از مجموعه های باز، باز است.
ج. اجتماع هر خانواده از مجموعه های بسته، بسته است.
د. اشتراک هر خانواده از مجموعه های بسته، باز است.

مجاز است.

استفاده از:

۶. فرض کنید (M, d) یک فضای متری، $A \subseteq M$ و $p \in M$. کدام گزینه معادل دیگر گزینه‌ها، نیست؟

الف. p یک نقطه انباشتگی (حدی-اجتماع) A است.

ب. هر همسایگی p شامل بی‌نهایت نقطه از A است.

ج. یک همسایگی از p وجود دارد که جزء A است.

د. دنباله $\{x_n\}$ از نقاط A وجود دارد که $x_n \neq p$ ولی $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$

۷. کدام عبارت درست نیست؟

الف. اگر در یک فضای متری، هر مجموعه یکانی باز باشد، آن فضای متری گسسته (مجزا) است.

ب. بازه‌های باز در R ، مجموعه‌های باز هستند.

ج. فضای متری القایی از R به N ، فضای متری گسسته است.

د. اگر $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in N \right\}$ آنگاه $\bar{A} = A$

۸. فرض کنید A مجموعه‌ای دلخواه در فضای متری (M, d) باشد. کدام گزاره نادرست است؟

الف. A باز است اگر و فقط اگر $A = A^\circ$

ب. A بسته است اگر و فقط اگر $A = \bar{A}$

د. $(A^\circ)^\circ = A$

ج. A بسته است اگر $A' \subseteq A$

۹. کدام عبارت صحیح نیست؟

الف. اگر A و B همبند باشند آنگاه $A \cup B$ نیز همبند است.

ب. اگر A همبند باشند آنگاه \bar{A} نیز همبند است.

ج. $A \subseteq R$ همبند است اگر و فقط اگر A یک بازه باشد.

د. A همبند است اگر و فقط اگر نتوان A را به صورت اجتماع دو مجموعه غیر خالی، باز و از هم جدا، نوشت.

۱۰. اگر (M, d) یک فضای متری کامل باشد، آنگاه

الف. همه زیر فضاهای M کامل هستند.

ب. هرگاه O_n ها در M باز و چگال باشند، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \emptyset$

ج. هر دنباله کوشی در M همگراست.

د. M را می‌توان به صورت اجتماعی شما را از مجموعه‌های هیچ جا چگال نوشت.

مجاز است.

استفاده از:

۱۱. فرض کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) دو فضای متریک و $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد. در این صورت

الف. اگر V در X باز باشد، آنگاه $f(V)$ در Y باز است.

ب. اگر V در X فشرده باشد، آنگاه $f(V)$ در Y فشرده است.

ج. اگر W در Y فشرده باشد، آنگاه $f^{-1}(W)$ در X فشرده است.

د. اگر V در X بسته باشد، آنگاه $f(V)$ در Y بسته است.

۱۲. کدام عبارت صحیح است؟

الف. تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در $(0, 1]$ پیوسته یکنواخت است.

ب. تابع $f(x) = \sin x$ بر R پیوسته یکنواخت نیست.

ج. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $[0, +\infty)$ پیوسته یکنواخت است.

د. هر تابع پیوسته، پیوسته یکنواخت است.

۱۳. فرض کنید $f(x) = |x^3|$ در این صورت $f'''(0)$ برابر است با؟

الف. ۶ ب. صفر ج. -۶ د. وجود ندارد

۱۴. فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^a \sin x^{-c} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در این صورت $f'(0)$ وجود دارد، اگر و فقط اگر

الف. $a > 1$ ب. $a \neq 0$ ج. $a < 1$ د. به ازای هر a

۱۵. اگر P_1, P_2 افزازی از $[a, b]$ باشند به طوریکه P_1 ظریفتر از P_2 باشد در این صورت

الف. $U(P_1, f) \leq U(P_2, f)$ ب. $U(P_2, f) \leq U(P_1, f)$

ج. $U(P_1, f) \leq L(P_2, f)$ د. $L(P_1, f) \leq L(P_2, f)$

۱۶. فرض کنید $f, g: [a, b] \rightarrow R$ و α تابعی صعودی روی $[a, b]$ باشد به طوریکه $f, g \in R$.

کدام عبارت نادرست است؟

الف. $fog \in R$ ب. $f + g \in R$ ج. $f - g \in R$ د. $f.g \in R$

۱۷. اگر $F(x) = \int_0^x e^t d(\sin t)$ ، $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه مقدار $F'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ برابر است با:

الف. $\frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{3}}$ ب. $\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\pi}{3}}$ ج. $\frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{3}}$ د. $-\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\pi}{3}}$

مجاز است.

استفاده از:

۱۸. دنباله $\{f_n\}$ را بر $[0, 1]$ با ضابطه $f_n(x) = n^r x(1-x)^n$ در نظر بگیرید. در این صورت

الف - $f_n \Rightarrow 0$ ب - $f_n \rightarrow 0$ ولی $f_n \not\Rightarrow 0$

ج - $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 0$ د - $\int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$

۱۹. دنباله توابع $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ با ضابطه $f_n(x) = x^n$ تعریف شده است.

فرض کنید $f_n \rightarrow f$ کدام گزینه درست است؟

الف. f بر $[0, 1]$ پیوسته است. ب. f بر $[0, 1]$ مشتق پذیر است.

ج. f کراندار است. د. $\{f_n\}$ بر $[0, 1]$ همگرای یکنواخت است.

۲۰. فرض کنید X فضای متری و $f_n \in C(X)$ و $f_n \rightarrow f$. شرط لازم برای اینکه $\{f_n\}$ هم پیوسته باشد، آن است که:

الف. X کراندار باشد ب. X فشرد باشد

ج. X بسته باشد د. X شمارش پذیر باشد

سوالات تشریحی

بارم هر سوال ۲ نمره است.

۱. (قضیه هاینه - بورل) ثابت کنید هر زیر مجموعه بسته و کراندار R^k ، فشرد است.

۲. فرض کنید X و Y دو فضای متری و f تابعی پیوسته از X به Y باشد. اگر $F \subseteq X$ فشرد باشد ثابت کنید $f(F)$ نیز فشرد است.

۳. اگر f'' بر $[a, b]$ موجود و متناهی باشد و $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$ ، نشان دهید نقطه‌ای مانند c در (a, b) وجود دارد به طوریکه $f'''(c) = 0$.

۴. فرض کنید $f \in R$ بر $[a, b]$ ، $m \leq f \leq M$ ، ϕ تابعی پیوسته بر $[m, M]$ باشد ثابت کنید $\phi \circ f \in R$ بر $[a, b]$.

۵. ثابت کنید دنباله $\{f_n\} \subseteq C(X)$ بر X به طور یکنواخت به f همگراست اگر و فقط اگر $f_n \rightarrow f$ در $C(X)$.