

نام درس: آنالیز عددی ۲

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض - کاربردی) - علوم کامپیوتر

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۱۰۰ دقیقه

کد درس: علوم کامپیوتر: ۱۱۹۰۰۴ - ریاضی: ۱۱۱۱۰۷۵

تعداد کل صفحات: ۵

«استفاده از ماشین حساب مجاز است»

۱- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت $tr(A^5)$ کدام است؟

الف) 33 (ب) 1024 (ج) 32 (د) 243

۲- اگر A یک ماتریس مربعی و وارون پذیر باشد و در رابطه $A^3 + A^2 - I = 0$ صدق کند، وارون ماتریس A^2 کدام است؟

الف) $A + I$ (ب) $A^2 + A$ (ج) $A^3 + A^2 - A$ (د) $A^3 + 2A^2$

۳- اگر A و B دو ماتریس مربعی، هم مرتبه و وارون پذیر باشند، کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟
الف) $(A + B)$ نیز وارون پذیر است.

(ب) اگر $\det A = \det B$ باشد آنگاه $A = B$ خواهد بود.

(ج) $\|A\| = \rho(A)$ یک نرم ماتریسی را مشخص می کند.

(د) $A'A$ یک ماتریس متقارن است.

۴- ماتریس $Q = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}$ چه نوع ماتریسی است؟

الف) قطر غالب (ب) هرمیتی (ج) متقارن (د) یکانی

*می خواهیم دستگاه معادلات زیر را با روش تجزیه ی LU حل نماییم.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

با توجه به این موضوع به سؤالات ۵ تا ۷ پاسخ دهید.

۵- مقدار u_{11} و l_{11} در تجزیه کروت به ترتیب از سمت راست به چپ عبارتند از:

الف) 2 و 1 (ب) 1 و 2 (ج) $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ (د) 1 و 1

۶- در تجزیه ی چولسکی مقادیر u_{13} و l_{13} به ترتیب از راست به چپ کدامند؟

الف) 3 و 1 (ب) $-3\sqrt{2}$ و 0 (ج) -6 و $\frac{1}{2}$ (د) -6 و 0

نام درس: آنالیز عددی ۲

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی -- تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض - کاربردی) - علوم کامپیوتر

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۱۰۰ دقیقه

کد درس: علوم کامپیوتر: ۱۱۱۹۰۰۴ - ریاضی: ۱۱۱۱۰۷۵

تعداد کل صفحات: ۵

۷- مقادیر u_{12} و l_{21} در تجزیه دولیتل به ترتیب از راست به چپ کدام گزینه است ؟

الف) ۱ و ۲ (ب) $2\sqrt{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) ۴ و $\frac{1}{2}$ (د) ۰ و ۲

۸- کدام یک از گزینه های زیر در مورد عدد شرطی ماتریس A صحیح می باشد ؟

الف) هر قدر $C(A)$ بزرگتر باشد ، کران بالا برای خطای نسبی در x کوچکتر است.
(ب) $C(A) \leq 1$

(ج) یک کران پایین برای $C(A)$ ، عدد یک می باشد.

(د) $C(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \|AA^{-1}\| = \|I\| = 1$

۹- اگر $A = L + D + U$ باشد که در آن D ، L و U به ترتیب ماتریس عناصر قطری ، زیر قطر و بالای قطر ماتریس

A است ، ماتریس تکرار روش ژاکوبی عبارتند از :

الف) $(L+U)^{-1}D$ (ب) $-(L+D)^{-1}U$ (ج) $(D+U)^{-1}L$ (د) $(L+U)^{-1}D$

۱۰- می خواهیم دستگاه $AX = b$ را به روش گوس- سایدل حل کنیم. دنباله حاصل از کدام یک از ماتریس های زیر شرط

کافی برای همگرایی به جواب دستگاه $AX = b$ را دارد ؟

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

۱۱- برای کدام یک از ماتریس های زیر، تجزیه ای به صورت LU وجود ندارد برای یافتن این تجزیه نیاز به تعویض

سطرهای A داریم؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

نام درس: آنالیز عددی ۲

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض - کاربردی) - علوم کامپیوتر

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۱۰۰ دقیقه

کد درس: علوم کامپیوتر: ۱۱۱۹۰۰۴ - ریاضی: ۱۱۱۱۰۷۵

تعداد کل صفحات: ۵

۱۲- در یک روش تکرار حل دستگاه معادلات خطی به صورت $X^{(k)} = BX^{(k-1)} + c$ ، اگر $T = I - \omega(I - B)$ و λ_i مقادیر

ویژه ماتریس تکرار B باشد، از نظر تجربی بهترین انتخاب برای ω کدام گزینه خواهد بود؟

الف) در صورتی که در روش SOR داشته باشیم $\omega > 1$

ب) در صورتی که مقادیر ویژه از نظر قدر مطلق خیلی از صفر دور گردند.

ج) در صورتی که $\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B_j)}}$ باشد. (B_j ماتریس تکرار روش ژاکوبی است).

د) در صورتی که مقادیر ویژه ابتدایی و انتهایی از نظر قدر مطلق برابر و مختلف علامه باشند.

۱۳- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

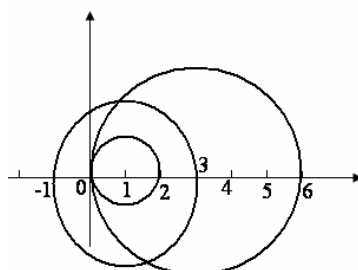
الف) $I - 6A + 8A^2 - A^3 = O$

ب) $A^2 + A + 5I = O$

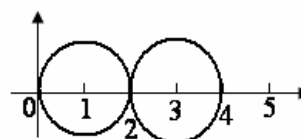
د) $A^3 - 5A^2 + 8A - 2I = O$

ج) $2A^2 - I = O$

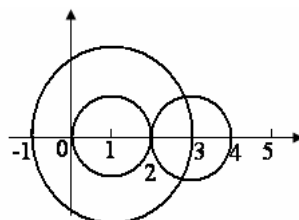
۱۴- اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، کدام یک از اشکال زیر دوائر گرشگورین را مشخص می کند؟



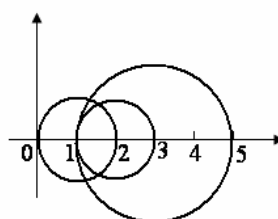
الف)



ب)



ج)



د)

نام درس: آنالیز عددی ۲

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض - کاربردی) - علوم کامپیوتر

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۱۰۰ دقیقه

کد درس: علوم کامپیوتر: ۱۱۱۹۰۰۴ - ریاضی: ۱۱۱۱۰۷۵

تعداد کل صفحات: ۵

*ماتریس زیر را در نظر گرفته و به سؤالات ۱۵ تا ۱۷ پاسخ دهید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۵- اگر از روش لوریبر برای یافتن چند جمله ای مشخصه ماتریس A استفاده کنیم، مقدار p_1 و s_2 به ترتیب از سمت راست به چپ کدامند؟

الف) ۶ و ۱۴ (ب) -۶ و ۴۲ (ج) ۴۲ و -۲ (د) ۲ و ۶

۱۶- در روش لوریبر مقدار P_p کدام است:

الف) -۶ (ب) -۳ (ج) ۸ (د) ۲

۱۷- اگر بخواهیم از روش توانی برای یافتن نزدیک ترین مقدار ویژه ماتریس A به عدد ۱۰ استفاده کنیم، کافی است در ابتدا:

الف) بزرگ ترین مقدار ویژه $A - 10I$ را به دست آوریم.

ب) بزرگ ترین مقدار ویژه $A + 10I$ را به دست آوریم.

ج) کوچک ترین مقدار ویژه $10I - A$ را به دست آوریم.

د) کوچک ترین مقدار ویژه $10I + A$ را به دست آوریم.

*ماتریس زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم با استفاده از روش LR مقادیر ویژه آن را به دست آوریم. (در هر مرحله عناصر قطری L را ۱ در نظر بگیرید).

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حال به سؤالات ۱۸ تا ۲۰ پاسخ دهید.

۱۸- در مرحله ی اول، کدام یک از ماتریس های زیر R_1 را مشخص می نماید؟

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & \frac{10}{9} \end{bmatrix} & \text{ب)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix} \\ \text{ج)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{10}{801} & 1 \end{bmatrix} & \text{د)} \begin{bmatrix} \frac{89}{9} & 8 \\ 0 & \frac{810}{801} \end{bmatrix} \end{array}$$

۱۹- در مرحله ی دوم ماتریس A_2 کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \begin{bmatrix} 9.9999 & 8.0001 \\ 0.0001 & 1.0001 \end{bmatrix} & \text{ب)} \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{ج)} \begin{bmatrix} \frac{89}{9} & 8 \\ \frac{10}{81} & \frac{10}{9} \end{bmatrix} & \text{د)} \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

نام درس: آنالیز عددی ۲

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض - کاربردی) - علوم کامپیوتر

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۱۰۰ دقیقه

کد درس: علوم کامپیوتر: ۱۱۱۹۰۰۴ - ریاضی: ۱۱۱۱۰۷۵

تعداد کل صفحات: ۵

۲۰- در مرحله ی دوم ، ماتریس L_2 کدام گزینه خواهد بود ؟

$$\begin{aligned} & \text{الف) } \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 0 & \frac{10}{9} \end{bmatrix} \quad \text{ب) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ج) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{10}{801} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{د) } \begin{bmatrix} \frac{89}{9} & 8 \\ 0 & \frac{810}{801} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

سؤالات تشریحی :

۱- ثابت کنید هرگاه A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشد ، آن گاه $\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

۲- مطلوبست حل دستگاه معادلات خطی زیر :

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 0x_3 = 12 \\ -4x_1 + 12x_2 - 6x_3 = 0 \\ 0x_1 - 6x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases}$$

با انتخاب $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ عملیات را آغاز کرده و با روش گوس-سایدل حل نمایید. (سه تکرار کافی است).

۳- بزرگ ترین مقدار ویژه ماتریس زیر را از نظر قدرمطلق با استفاده از روش توانی و با انتخاب $Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بیابید. (سه تکرار کافی است).

۴- ثابت کنید $\rho(A^t A) = \|A\|_F^2$

۵- معادله دیفرانسیل زیر را به همراه شرایط مرزی و اولیه آن در نظر بگیرید :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x$$

$$u(x, 0) = 0, u(x, 3) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$u(0, y) = 0, u(3, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 3$$

با انتخاب $h = k = 1$ ، معادله دیفرانسیل فوق را حل نمایید. (نیازی به حل دستگاه معادله خطی حاصل نیست).