کد کنترل

469

A

469A

آزمون ورودی دورهٔ دکتری (نیمه‌متمرکز) ـ سال ۱۴۰۰

دفترچهٔ شمارهٔ (۱)
صبح جمعه
۹۹/۱۲/۱۵

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

رشتهٔ آمار ـ (کد ۲۲۳۲)

تعداد سؤال: ۴۵ مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	مجموعه دروس تخصصی: ـ مبانی آنالیز ریاضی ـ ریاضی عمومی ۱ و ۲ ـ احتمال ۱ و ۲ ـ استنباط آماری ۱	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

۱- مکان هندسی نقاط $z = x + iy$ که در نامساوی $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < ۲$ صدق می‌کنند، کدام است؟ $(i^۲ = -۱)$

۱) خارج دایره‌ای به مرکز $(\circ, -\frac{۵}{۳})$ و شعاع $\frac{۴}{۳}$

۲) خارج دایره‌ای به مرکز $(\circ, \frac{۵}{۳})$ و شعاع $\frac{۴}{۳}$

۳) خارج دایره‌ای به مرکز $(\circ, -\frac{۴}{۳})$ و شعاع $\frac{۵}{۳}$

۴) خارج دایره‌ای به مرکز $(\circ, \frac{۴}{۳})$ و شعاع $\frac{۵}{۳}$

۲- فرض کنید برای دو تابع چندجمله‌ای f و g داشته باشیم:

$$f(x) + g(x) = ۵ \,,\ f(g(x)) = ۸ - ۴x$$

مجموعه مقادیر ممکن برای $g(۲)$ کدام است؟

۱) $\{۱, -۳\}$

۲) $\{-۱, ۳\}$

۳) $\{۱, ۳\}$

۴) $\{-۱, -۳\}$

۳- ضابطهٔ تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ کدام باشد تا f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد؟ ($[x]$ جزء صحیح x است.)

۱) $f(x) = [x]^۲ + (x - [x] + ۱)^۲$

۲) $f(x) = [x]^۲ + (x - [x])^۲$

۳) $f(x) = (x - [x])^۲ + (x - [x] + ۱)^۲$

۴) $f(x) = (x - [x])^۲ + (x - [x] - ۱)^۲$

۴- ناحیهٔ درون سهمی $y = x^۲$ و نیمساز ربع اول را حول خط $y = x$ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از این دوران کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۱۵}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}\pi}{۳۰}$

۳) $\frac{\pi}{۱۵}$

۴) $\frac{\sqrt{۲}\pi}{۶۰}$

۵- تابع $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۳ + y^۳}{x^۲ + xy + y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ را در نظر بگیرید. حاصل $\nabla^۲ f(x,y)$ در مبدأ مختصات کدام است؟

۱) صفر　۲) ۵　۳) تعریف نشده　۴) ۳

۶- حاصل انتگرال $\int_۰^۱ \int_{\sqrt{y}}^۱ \sin(\pi x^۳)\, dxdy$ کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳\pi}$

۲) ۰

۳) $\frac{۱}{۳\pi}$

۴) $\frac{۲}{۳\pi}$

۷- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}(x,y,z) = \frac{x}{x^۲ + y^۲ + ۱}\vec{i} - \frac{y}{x^۲ + y^۲ + ۱}\vec{j} + \vec{k}$ روی منحنی بستهٔ $x^۲ + y^۲ = a^۲$ $(a > ۰)$ در صفحهٔ $z = x$ در جهت مثبت کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{a^۲}{a^۲ + ۱}$

۳) $\frac{-a^۲}{a^۲ + ۱}$

۴) $\frac{-۲a^۲}{a^۲ + ۱}$

۸- نیروی $\vec{F}(x,y,z)=y^{2}\vec{i}-x^{2}\vec{j}-3z^{2}\vec{k}$ بر سطح جانبی استوانه‌ای شکل S با ضابطهٔ $r=2(1+\cos\theta)$ محدود به صفحات $z=1$ و $z=2$ جریان دارد. شارگذرا از سطح S کدام است؟

۱) -3π

۲) 9π

۳) صفر

۴) 3π

۹- فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی با متر قدرمطلق باشد. گوییم $A\subseteq\mathbb{R}$ عجیب است هرگاه زیرمجموعهٔ بسته B در $\mathbb{R}$ و زیرمجموعهٔ باز C در $\mathbb{R}$ موجود باشند، به‌طوری که $A=B\bigcap C$ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر عجیب نیست؟

۱) $[0,1)$

۲) مجموعهٔ اعداد گویا

۳) یک مجموعهٔ بسته در $\mathbb{R}$

۴) یک مجموعهٔ باز دلخواه در $\mathbb{R}$

۱۰- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر و برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f(\frac{1}{n})=0$ می‌تواند صفر نباشد. کدام مورد درست است؟

۱) $f(0)=f'(0)=0$

۲) $f(0)=0$ و $f'(0)$ می‌تواند صفر نباشد.

۳) f فقط تابع ثابت صفر است.

۴) f' روی $[0,1]$ کراندار است.

۱۱- فرض کنید $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته وبر $(0,1)$ مشتق‌پذیر بوده و $f(1)=0$. کدام مورد حتماً درست است؟

۱) $c\in(0,1)$ موجود است به‌طوری‌که $cf'(c)-f(c)=0$

۲) $c\in(0,1)$ موجود است به‌طوری‌که $f'(c)+f(c)=0$

۳) $c\in(0,1)$ موجود است به‌طوری‌که $cf'(c)+f(c)=0$

۴) $c\in(0,1)$ موجود است به‌طوری‌که $f'(c)-f(c)=0$

۱۲- فرض کنید تقعر تابع پیوسته و دوبار مشتق‌پذیر f در نقطهٔ $x=1$، به سمت پایین باشد. اگر $f(1)$ ماکزیمم نسبی تابع f باشد، وضعیت تابع $g(x)=f(x)+f(x^{2})+f(x^{4})$ در $x=1$ چگونه است؟

۱) می‌نیمم نسبی است.

۲) ماکزیمم نسبی است.

۳) نقطه عطف است.

۴) هیچ نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود.

۱۳- فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ فضای متریک (M,d) باشد. A بی‌نقص نامیده می‌شود، هرگاه بسته و هر عنصر آن یک نقطهٔ حدی باشد. کدام مورد درست است؟

۱) مجموعهٔ $A=[0,1]\bigcup\{2\}$ در فضای $\mathbb{R}$ و متریک معمولی بی‌نقص است.

۲) مجموعهٔ $A=[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$ در فضای $\mathbb{Q}$ و متریک معمولی بی‌نقص است.

۳) هر مجموعهٔ بسته در فضای $\mathbb{R}$ بی‌نقص است.

۴) مجموعه‌های بی‌نقص در هر فضای متریک، شمارش ناپذیرند.

۱۴- ۹۰ بلیط بخت آزمایی توسط ۹ نفر و هر کدام ۱۰ بلیط خریداری می‌شود که شامل ۵ بلیط برنـده اسـت. احتمـال اینکه هر ۵ بلیط برنده را یک نفر دریافت کند، کدام است؟

۱) $\frac{۶\times۷\times۸\times۹}{۸۶\times۸۷\times۸۸\times۸۹}$

۲) $\frac{۶\times۷\times۸\times۹\times۱۰}{۸۶\times۸۷\times۸۸\times۸۹\times۹۰}$

۳) $\frac{۶\times۷\times۹\times۱۰}{۸۶\times۸۸\times۸۹\times۹۰}$

۴) $\frac{۷\times۸\times۹}{۸۷\times۸۸\times۸۹}$

۱۵- فرض کنید R دامنه تغییرات و $Q_۱$، $Q_۲$ و $Q_۳$ به‌ترتیب چارک‌های اول، دوم و سوم داده‌ها باشند. کدام شاخص جزء شاخص‌های پراکندگی غیرحساس به داده‌های دور افتاده (پرت) است؟

۱) $\frac{R}{Q_۲}$

۲) $\frac{Q_۳-Q_۱}{R}$

۳) $\frac{Q_۳+Q_۱}{Q_۲}$

۴) $\frac{Q_۳-Q_۱}{Q_۲}$

۱۶- فرض کنید $X_۱,...,X_n$، $(n\geq ۲)$ یک نمونه تصادفی از توزیعی پیوسته با تابع توزیـع F باشـد، احتمـال اینکـه دومین آماره ترتیبی کوچکتر یا مساوی میانه توزیع باشد، چقدر است؟

۱) $۱-\frac{n}{۲^n}$

۲) $۱-\frac{n+۱}{۲^n}$

۳) $۱-\frac{n-۱}{۲^{n-۱}}$

۴) $۱-\frac{n}{۲^{n-۱}}$

۱۷- اگـر X و Y دو متغیـر تصـادفی مسـتقل بـا توزیـع یکنواخـت اسـتاندارد باشـند $((X, Y \sim U(0,1))$، آنگـاه $P[(1-X)(1-Y) > \frac{1}{4}]$ برابر است با:

۱) $\frac{3+2\ln(2)}{4}$

۲) $\frac{3+\ln(2)}{2}$

۳) $\frac{3-\ln(2)}{4}$

۴) $\frac{3-2\ln(2)}{4}$

۱۸- فـرض کنیـد X و Y دو متغیـر تصـادفی گسسـته بـا تـابع جـرم احتمـال $P(X = x, Y = y) = \begin{cases} c(x+y) & x, y \in \{1, 2, ..., n\} \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ باشند، $P(X < Y)$ برابر با کدام است؟

۱) $\frac{1}{n}$

۲) $\frac{1}{2n}$

۳) $\frac{n-1}{2n}$

۴) $\frac{n-1}{n}$

۱۹- در ظرفی تعدادی مهره سفید و آبی وجود دارد. نسبت مهره‌های آبی (θ) یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $g(\theta)(0 < \theta < 1)$ است. اگر دو مهره با جایگذاری برداریم و E و F به‌ترتیب پیشامد آبـی بـودن مهـره اول و دوم باشد، آنگاه:

۱) $P(E \cap F) < P(E)P(F)$

۲) $P(E \cap F) = P(E)P(F)$

۳) $P(E \cap F) > P(E)P(F)$

۴) $\frac{1}{2}P(E)P(F) < P(E \cap F) < P(E)P(F)$

۲۰- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مسـتقل بـه‌ترتیـب بـا تـابع توزیـع تجمعـی $F(x)$ و $G(y)$ باشـند. اگـر $A = \int_1^\infty (1-F(y))\,dG(y)$ و $B = \int_1^\infty (1-G(x))\,dF(x)$، آنگاه $A+B$ کدام است؟

۱) $P(X > 1, Y > 1)$

۲) $P(X > Y > 1)$

۳) $P(Y > X > 1)$

۴) $P(X > 1) + P(Y > 1)$

۲۱- فرض کنید تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی W به‌صورت $(\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}e^t)^۳$ و $M_W(t)=e^{-۳+۳e^t}$ باشد، مقدار $P(W\leq ۱)$ کدام است؟

۱) صفر

۲) $e^{-۳}$

۳) $\frac{۴۶}{۲۷}e^{-۳}$

۴) $\frac{۴۴}{۲۷}e^{-۳}$

۲۲- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان نمایی با میانگین ۱ باشند. مقدار $\rho\left(\max(X,Y),\min(X,Y)\right)$ چقدر است؟

۱) صفر

۲) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$

۳) $\frac{۱}{۵}$

۴) ۱

۲۳- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل پواسون به‌ترتیب با پارامترهای λ و ۲λ باشند، مقدار $E(X^۲+Y^۲\mid X+Y=m)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴m^۲}{۹}$

۲) $\frac{۵m^۲}{۹}$

۳) $\frac{۴m^۲+۵m}{۹}$

۴) $\frac{۵m^۲+۴m}{۹}$

۲۴- فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک مجموعه از متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و نامنفی و $I_{p_۱},\dots,I_{p_n}$ نیز یک مجموعه از متغیرهای تصادفی برنولی مستقل از هم و مستقل از X_iها باشند که در آن $E(I_{p_i})=p_i$ است و $(i=۱,۲,\dots,n)$. تابع توزیع $Y_{n:n}=\max\left\{X_۱I_{p_۱},\dots,X_nI_{p_n}\right\}$ کدام است؟

۱) $\prod_{i=۱}^{n}[۱-p_i\bar{F}_{X_i}(x)]$

۲) $\prod_{i=۱}^{n}[۱-(۱-p_i)\bar{F}_{X_i}(x)]$

۳) $\prod_{i=۱}^{n}[۱-p_iF_{X_i}(x)]$

۴) $\prod_{i=۱}^{n}[۱-(۱-p_i)F_{X_i}(x)]$

۲۵- فرض کنید $X_n(n \geq 1)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر $\frac{n}{2}$ باشد. در این‌صورت دنبالهٔ $T_n = \frac{nX_n}{X_n^2 + 2n^2}$ در احتمال به کدام مقدار میل می‌کند؟

۱) 0

۲) $\frac{2}{9}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) 4

۲۶- فرض کنید $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال دو متغیره با میانگین‌های یکسان صفر و واریانس‌های یکسان ۱ و کوواریانس θ باشد. اگر:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i \ ، \ T_2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ ، \ T_3 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \ ، \ T_4 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \ ، \ T_5 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) (T_1, T_2) آماره فرعی (کمکی) است.

۲) $(T_2 T_3 \ , \ T_1 T_4)$ آماره فرعی است.

۳) $T_1 T_4$ و T_3 آماره فرعی هستند ولی $(T_3, T_1 T_4)$ آماره فرعی نیستند.

۴) T_4 و T_3 آماره فرعی هستند ولی (T_3, T_4) آماره فرعی نیست.

۲۷- فرض کنید $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال دو متغیره‌ای با تابع چگالی توام زیر باشد.

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\pi\theta^2} \ I_{(0,\theta)}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

آماره بسنده کامل کدام است؟

۱) $X_{(n)}^2 + Y_{(n)}^2$

۲) $\max\limits_{i=1,\ldots,n} (X_i^2 + Y_i^2)$

۳) $\sum_{i=1}^{n} (X_i^2 + Y_i^2)$

۴) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$

۲۸- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع $f(x)=\binom{x+3}{3}\theta^4(1-\theta)^x\,,\,x=0,1,2,\ldots$. برآورد گشتاوری θ وقتی‌که مشاهدات برابر ۲، ۳، ۵، ۲، ۳ باشند، کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$

۲) $\frac{3}{7}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{1}{3}$

۲۹- فرض کنید $X_1,X_2,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت $U(\theta,\theta+|\theta|)$ باشد. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر $\theta\in R-\{0\}$ برای زمانی‌که $X_i<0$ باشند، عبارتست از:

۱) $\frac{X_{(1)}}{2}$

۲) $X_{(n)}$

۳) $X_{(1)}$

۴) $\frac{X_{(n)}}{2}$

۳۰- فرض کنید تابع چگالی متغیر تصادفی X به‌صورت $-1\le\theta\le 1\ ,\ 0<x<1\ ,\ f_\theta(x)=2\theta^2x+1-\theta^2$ باشند. براساس تک مشاهده x، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم θ کدام است؟

۱) $\hat\theta=\begin{cases}1,-1 & x>\frac{1}{2}\\ c\in[-1,1] & x=0\\ 0 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$

۲) $\hat\theta=\begin{cases}1 & x\ge\frac{1}{2}\\ -1 & x\le\frac{1}{2}\end{cases}$

۳) $\hat\theta=\begin{cases}1 & x\ge\frac{1}{2}\\ 0 & x\le\frac{1}{2}\end{cases}$

۴) $\hat\theta=\begin{cases}1,-1 & x<\frac{1}{2}\\ c\in[-1,1] & x=\frac{1}{2}\\ -1 & x<\frac{1}{2}\end{cases}$

۳۱- فرض کنید x یک تک مشاهده از توزیع با تابع چگالی $\theta \in \{۱,۲,...\}$ $f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۳} & [x]=\theta \\ \frac{۲}{۳} & [x]=\theta+۱\end{cases}$ باشد، که در آن θ یک عدد صحیح مثبت است. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی θ کدام است؟

۱) $\hat{\theta}=\begin{cases}۱ & ۱\le x<۲ \\ [x]-۱ & x\ge ۲\end{cases}$

۲) $\hat{\theta}=a$ که در آن a عدد صحیحی است که $x-۱\le a<x$

۳) $\hat{\theta}=a$ که در آن عدد صحیحی است که $x-۱<a\le x$

۴) $\hat{\theta}=[x]$

۳۲- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ ، n متغیر تصادفی مستقل باشند به گونه‌ای که $X_i \sim N(\circ,\frac{\theta^۲}{i})$. در صورت وجود، بهترین برآوردگر نااُریب θ کدام است؟

۱) $\frac{\Gamma(\frac{n+۱}{۲})\sqrt{۲}}{\Gamma(\frac{n}{۲})}\sum_{i=۱}^{n} i\,|X_i|$

۲) $\frac{\Gamma(\frac{n}{۲})}{\Gamma(\frac{n+۱}{۲})\sqrt{۲}}\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} iX_i^۲}$

۳) $\frac{\Gamma(\frac{n}{۲})}{\Gamma(\frac{n+۱}{۲})\sqrt{۲}}\sum_{i=۱}^{n} i\,|X_i|$

۴) $\frac{\Gamma(\frac{n+۱}{۲})\sqrt{۲}}{\Gamma(\frac{n}{۲})}\sqrt{\sum_{i=۱}^{n} iX_i^۲}$

۳۳- فرض کنید $X_۱,X_۲$ ، یک نمونه تصادفی دو تایی از تابع احتمال $P(X=x)=\frac{\theta^x}{x!(e^\theta-۱)}\ ,\ x=۱,۲,...\ ,\ \theta>\circ$ باشد. کدام $h(T)$، برآوردگر UMVU برای θ است؟

۱) $\sum_{i=۱}^{T-۱}\frac{۱}{i!(T-i)!}\Big/\sum_{i=۱}^{T-۲}\frac{۱}{i!(T-۱-i)!}\ ;T=۳,۴,...$

۲) $\sum_{i=۱}^{T-۲}\frac{۱}{i!(T-۱-i)!}\Big/\sum_{i=۱}^{T-۱}\frac{۱}{i!(T-i)!}\ ;T=۳,۴,...$

۳) $\sum_{i=۱}^{T}\frac{۱}{i!(T-i)!}\Big/\sum_{i=۱}^{T}\frac{۱}{i!(T-۱-i)!}\ ;T=۳,۴,...$

۴) $\sum_{i=۱}^{T}\frac{۱}{i!(T-۱-i)!}\Big/\sum_{i=۱}^{T}\frac{۱}{i!(T-i)!}\ ;T=۳,۴,...$

۳۴- فرض کنید $Y_۱,\ldots,Y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال یکسان $f(y)=\frac{\theta}{۲(۱+|y|)^{\theta+۱}}$, $\theta>۰$, $y\in\mathbb{R}$ باشد، برآوردگر UMVU پارامتر $\theta^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{۱+|Y_i|}$

۲) $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\ln(۱+|Y_i|)$

۳) $\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(۱+|Y_i|)$

۴) $-\frac{۱}{n}\sum\ln(|Y_i|)$

۳۵- فرض کنید $X_۱,X_۲,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(۰,\theta)$ باشند. برآوردگر UMVU پارامتر $\sqrt{\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})}\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲}$

۲) $\frac{\Gamma(\frac{n}{۲})}{\sqrt{۲}\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}\sqrt{|\sum_{i=۱}^{n}X_i|}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})}\sqrt{|\sum_{i=۱}^{n}X_i|}$

۴) $\frac{\Gamma(\frac{n}{۲})}{\sqrt{۲}\Gamma(\frac{n+۱}{۲})}\sqrt{\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲}$

۳۶- فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع لگ نرمال با تابع چگالی $x>۰,\theta>۰$ و $f_\theta(x)=\frac{۱}{x\sqrt{۲\pi\theta}}e^{-\frac{۱}{۲\theta}(\ln x)^۲}$ باشد، اطلاع فیشر پارامتر کدام است؟

۱) $\frac{n}{۲\theta^۲}$

۲) $n\theta^۲$

۳) $\frac{n}{۲\theta}$

۴) $\frac{۲}{n}\theta$

۳۷- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی باشند، به‌طوری‌که:

$$X_i = \ln(Y_i) \sim N(\mu, \sigma^2),\ i = 1, 2, \dots, n$$

همچنین فرض کنید $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ بیانگر آماره‌های مرتب متناظر با $Y_1, \dots, Y_n$ باشند. برآوردگر $T = \left\{\prod_{i=1}^{n} Y_{(i)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ برای چه کمیتی سازگار است؟

۱) μ

۲) e^{σ^2}

۳) e^{μ}

۴) σ^2

۳۸- فرض کنید X دارای توزیع برنولی با پارامتر θ باشد. تحت تابع زیان توان دوم خطا، مخاطره برآوردگر تصادفی‌شده زیر کدام است؟

$$T(X) = \begin{cases} X & \text{با احتمال } X \\ \frac{1}{2} & \text{با احتمال } 1-X \end{cases}$$

۱) $\frac{1-\theta}{4}$

۲) $\frac{\theta(1-\theta)}{4}$

۳) $\theta\left(\theta^2 + (\theta - \frac{1}{2})^2\right)$

۴) $(1-\theta)\left(\theta^2 + (\theta - \frac{1}{2})^2\right)$

۳۹- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0, \theta)$ باشد. اگر توزیع پیشین $Pa(3, 4)$ و تابع زیان برابر با $L(\theta, \delta) = \theta(\delta - \theta)^2$ باشد، برآوردگر بیز θ کدام است؟

$$\left(\theta \sim Pa(\alpha, \sigma) \to \pi(\theta) = \frac{\alpha\sigma^{\alpha}}{\theta^{+1}},\ \theta \geq \sigma\right)$$

۱) $\frac{n+1}{n+2}\max(4, X_{(n)})$

۲) $\frac{n+3}{n+2}\max(3, X_{(n)})$

۳) $\frac{n+2}{n+3}\max(3, X_{(n)})$

۴) $\frac{n+2}{n+1}\max(4, X_{(n)})$

۴۰- فرض کنید $X_1,...,X_5$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0,\theta)$ باشد. اگر تابع چگالی پیشین (ناسره) $\pi(\theta)=\frac{1}{\theta},\theta>0$ و تابع زیان $L(\theta,\delta)=\theta(\delta-\theta)^2$ باشد، برآوردگر بیز تعمیم‌یافته کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}X_{(5)}$

۲) $\frac{3}{4}X_{(5)}$

۳) $\frac{2}{3}X_{(5)}$

۴) $\frac{3}{2}X_{(5)}$

۴۱- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. با در نظر گرفتن تابع توان دوم خطا و توزیع پیشین (ناسره) جفریز، برآوردگر بیز تعمیم‌یافته کدام است؟

۱) $\bar{X}$

۲) $X+\frac{1}{2}$

۳) $\bar{X}+\frac{1}{2n}$

۴) $\bar{X}+\frac{1}{n}$

۴۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ باشد. با در نظر گرفتن تابع زیان $L(\lambda,\delta)=(\frac{\delta}{\lambda}-1)^2$ و توزیع پیشین مزدوج با شرط $E(\lambda)=1$ و $V(\lambda)=\frac{1}{2}$، برآوردگر بیز λ کدام است؟

۱) $\bar{X}+\frac{2}{n}$

۲) $\frac{1}{\bar{X}+\frac{1}{2n}}$

۳) $\frac{1}{\bar{X}+\frac{2}{n}}$

۴) $\bar{X}+\frac{1}{2n}$

۴۳- فرض کنید $X_{۱},\dots,X_{n}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. با در نظر گرفتن تابع توان دوم خطای وزنی با وزن $w(\lambda)=\frac{۱}{\lambda}$، گزینه صحیح کدام است؟

۱) $\bar{X}$ نمی‌تواند یک برآوردگر بیز، نسبت به یک توزیع پیشین سره باشد، همچنین مجاز نیست ولی یک برآوردگر مینیماکس برای λ است.

۲) $\bar{X}$ یک برآوردگر بیز، مینیماکس برای λ است، اما مجاز نیست.

۳) $\bar{X}$ یک برآوردگر بیز و مجاز برای λ است، اما مینیماکس نیست.

۴) $\bar{X}$ نمی‌تواند یک برآوردگر بیز، نسبت به یک توزیع پیشین سره باشد، اما یک برآوردگر مینیماکس و مجاز برای λ است.

۴۴- با فرض $R(\theta,\delta)$ نمایانگر مخاطره δ و $r(\pi,\delta)$ نمایانگر تابع مخاطره بیز δ باشند و π تابع چگالی احتمال پیشین، δ_{π} برآوردگر بیز نسبت به π باشند. ψ نمایانگر تمام توزیع‌های پیشین (سره) باشد، δ_{π} یک برآوردگر مینیماکس است، اگر:

۱) $r(\pi,\delta_{\pi})\le R(\theta,\delta_{\pi}),\forall\theta\in\Theta$

۲) $R(\theta,\delta_{\pi})\le r(\pi,\delta_{\pi}),\forall\theta\in\Theta$

۳) $\sup\limits_{\theta} R(\theta,\delta_{\pi})\ge \sup\limits_{\pi\in\psi} r(\pi,\delta)$

۴) $\sup\limits_{\theta} R(\theta,\delta_{\pi})\ge \inf\limits_{\pi\in\psi} r(\pi,\delta)$

۴۵- مسأله تصمیم زیر را در نظر بگیرید.

Θ \ x	$x_{۱}$	$x_{۲}$
$\theta_{۱}$	۰/۲	۰/۸
$\theta_{۲}$	۰/۶	۰/۴

Θ \ A	$a_{۱}$	$a_{۲}$	$a_{۳}$	$a_{۴}$
$\theta_{۱}$	۲	۱	۲	۴
$\theta_{۲}$	۴	۳	۲	۳

کدام‌یک از قاعده‌های تصمیم‌های ناتصادفی زیر قطعاً و بدون نیاز به محاسبه غیرمجاز (ناپذیرفتنی) هستند؟

x \ D	$d_{۱}$	$d_{۲}$	$d_{۳}$	$d_{۴}$	$d_{۵}$	$d_{۶}$	$d_{۷}$	$d_{۸}$	$d_{۹}$	$d_{۱۰}$	$d_{۱۱}$	$d_{۱۲}$	$d_{۱۳}$	$d_{۱۴}$	$d_{۱۵}$	$d_{۱۶}$
$x_{۱}$	$a_{۱}$	$a_{۲}$	$a_{۳}$	$a_{۴}$	$a_{۱}$	$a_{۱}$	$a_{۱}$	$a_{۲}$	$a_{۲}$	$a_{۲}$	$a_{۳}$	$a_{۳}$	$a_{۳}$	$a_{۴}$	$a_{۴}$	$a_{۴}$
$x_{۲}$	$a_{۱}$	$a_{۲}$	$a_{۳}$	$a_{۴}$	$a_{۲}$	$a_{۳}$	$a_{۴}$	$a_{۱}$	$a_{۳}$	$a_{۴}$	$a_{۱}$	$a_{۲}$	$a_{۴}$	$a_{۱}$	$a_{۲}$	$a_{۳}$

۱) $d_{۱},d_{۴},d_{۷},d_{۱۰},d_{۱۳},d_{۱۶}$

۲) $d_{۱},d_{۵},d_{۹},d_{۱۳}$

۳) $d_{۱},d_{۵},d_{۶},d_{۸},d_{۱۰},d_{۱۲},d_{۱۴},d_{۱۶}$

۴) $d_{۱},d_{۴},d_{۵},d_{۶},d_{۷},d_{۸},d_{۱۰},d_{۱۱},d_{۱۳},d_{۱۴},d_{۱۵},d_{۱۶}$